

Exercice – Diffraction par une poudre de cacao

Remarque

Bac S 2017 – Amérique du Nord – Exercice I : diffraction par une poudre de cacao (5 points, durée conseillée 50 min). Sujet téléchargé sur labolycee.org.

On attribue la découverte de la diffraction à Francesco Grimaldi (1618-1663). Le but de l'exercice est d'étudier une application pratique de la diffraction : la détermination de la taille moyenne de poudre de cacao par granulométrie.

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Document 1 – Granulométrie laser de la poudre de cacao



L'appareil ci-contre permet de mesurer la taille de particules allant de 40 nm à 2500 μm tout en occupant un encombrement extrêmement réduit.

Le fabricant de l'appareil indique que deux diodes laser de longueurs d'onde 635 nm et 830 nm sont utilisées dans cet instrument de mesure.

Document 2 – Différents types de chocolat

Le succès du chocolat, auprès des consommateurs, est lié à des caractéristiques gustatives bien identifiées mais aussi à la granulométrie de chacun des constituants. Cette dernière propriété représente un enjeu important du procédé de fabrication puisque des particules trop finement broyées rendront le chocolat collant alors que de trop grosses particules lui donneront un aspect granuleux à l'œil et en bouche.

La mesure de la taille des particules, par diffraction laser, est une technique simple et rapide, adaptée à la détermination de la distribution granulométrique de tous les types de chocolat comme les chocolats de couverture utilisés pour le nappage, les chocolats au lait ou les chocolats agglomérés utilisés pour les recettes instantanées.

Type de chocolat	De couverture	Au lait	Aggloméré
a (*) en μm	10	30	300

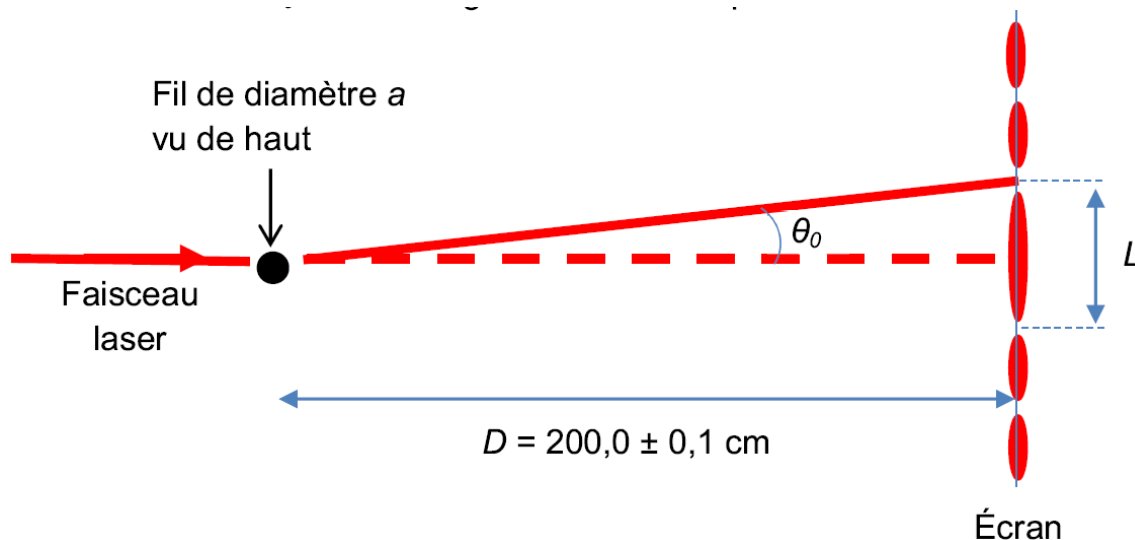
(*) a représente le diamètre moyen recommandé de la poudre de cacao pour un type de chocolat.

D'après <http://www.es-France.com/pdf/010-Cacao.pdf>

Exercice – Diffraction par une poudre de cacao

Partie 1 – Vérification de la longueur d'onde d'une des diodes laser utilisées

L'objectif de cette partie est de vérifier la valeur de la longueur d'onde λ d'une des diodes laser utilisées dans l'appareil de granulométrie. Sur le trajet du faisceau laser, on intercale des fils de différents diamètres. Sur un écran placé à une distance D , on observe une figure de diffraction. L représente la largeur de la tache centrale et θ_0 le demi-angle au sommet exprimé en radian.



1.1. Rappeler les trois principales propriétés du faisceau d'un laser.

✓ Correction

Question hors programme : les trois propriétés du faisceau laser ne figurent pas au programme actuel de Terminale spécialité (question héritée du bac S 2017).

Le faisceau d'un laser est :

- **directif** : il se propage quasiment sans diverger (faisceau quasi parallèle) ;
- **monochromatique** : il est constitué d'une seule longueur d'onde ;
- **cohérent** : les ondes lumineuses émises sont en phase (déphasage constant).

1.2. Pour une longueur d'onde donnée, décrire l'évolution du demi-angle θ_0 en fonction du diamètre a du fil. Donner la relation qui lie λ , θ_0 et a .

✓ Correction

Pour une longueur d'onde λ fixée, le demi-angle θ_0 est d'autant plus grand que le diamètre a du fil est petit : θ_0 est inversement proportionnel à a .

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{a}$$

Exercice – Diffraction par une poudre de cacao

1.3. On fait l'hypothèse que l'angle θ_0 est petit. Dans ce cas, on peut écrire $\tan \theta_0 \approx \theta_0$ avec θ_0 en radian.

À l'aide du schéma, démontrer que la largeur de la tache centrale est donnée par l'expression :

$$L = k \cdot \frac{1}{a} \quad \text{avec} \quad k = 2\lambda D$$

✓ Correction

Sur le schéma, dans le triangle rectangle formé par l'axe du faisceau, l'écran et la direction de la première extinction :

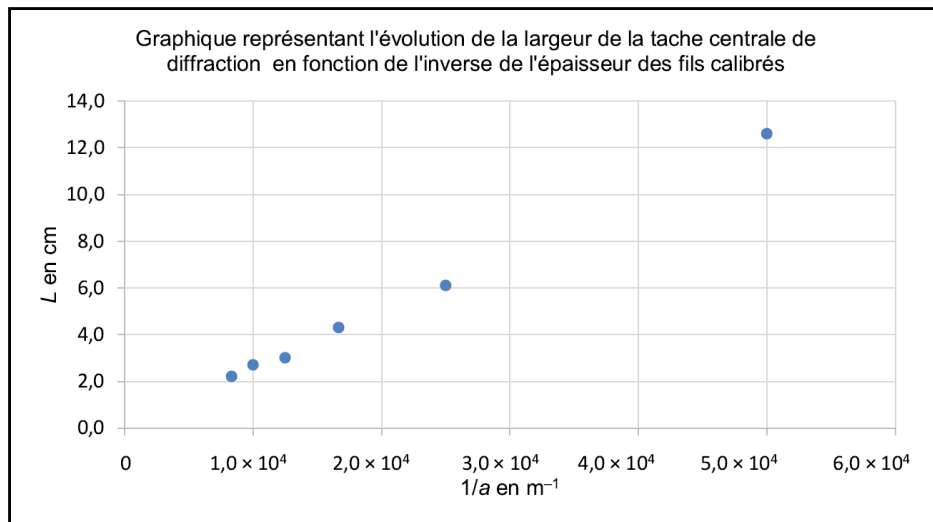
$$\tan \theta_0 = \frac{L/2}{D} = \frac{L}{2D}$$

Dans l'approximation des petits angles, $\tan \theta_0 \approx \theta_0$, donc $\theta_0 = \frac{L}{2D}$. Or $\theta_0 = \frac{\lambda}{a}$, d'où :

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2\lambda D}{a} = k \cdot \frac{1}{a} \quad \text{avec} \quad k = 2\lambda D$$

1.4. Expérimentalement, on mesure la largeur de la tache centrale L pour des fils calibrés de différentes valeurs de diamètre a . On porte les valeurs obtenues sur le graphique ci-dessous.

À partir du graphique, déterminer la longueur d'onde λ de la diode laser utilisée.



✓ Correction

D'après $L = k \cdot \frac{1}{a}$, la courbe $L = f\left(\frac{1}{a}\right)$ est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur k . On trace la droite modélisée passant au plus près des points expérimentaux et par l'origine, puis on y lit deux points, par exemple $(0;0)$ et $(4,0 \times 10^4 \text{ m}^{-1}; 10,0 \text{ cm})$. Attention : L doit être converti en mètres pour que k soit homogène à une surface.

$$k = \frac{\Delta L}{\Delta\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{10,0 \times 10^{-2} \text{ m} - 0}{4,0 \times 10^4 \text{ m}^{-1} - 0} = 2,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Or $k = 2\lambda D$, avec $D = 200,0 \text{ cm} = 2,000 \text{ m}$ (schéma), donc :

$$\lambda = \frac{k}{2D} = \frac{2,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{2 \times 2,000 \text{ m}} = 6,25 \times 10^{-7} \text{ m} \approx 6,3 \times 10^{-7} \text{ m} = 630 \text{ nm}$$

Exercice – Diffraction par une poudre de cacao

1.5. L'incertitude absolue sur la longueur d'onde λ , notée $\Delta\lambda$, peut être déterminée à partir de la relation suivante :

$$U(\lambda) = \lambda \cdot \sqrt{\left(\frac{U(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{U(k)}{k}\right)^2}$$

L'incertitude absolue sur la valeur du coefficient directeur est $U(k) = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m}^2$.

Exprimer la valeur de la longueur d'onde λ avec son incertitude. Confronter aux valeurs données par le fabricant de l'appareil ; conclure.

✓ Correction

Le schéma indique $D = 200,0 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$, soit $U(D) = 0,1 \text{ cm}$, d'où $\frac{U(D)}{D} = \frac{0,1}{200,0} = 5,0 \times 10^{-4}$ et $\frac{U(k)}{k} = \frac{1,2 \times 10^{-7}}{2,5 \times 10^{-6}} = 4,8 \times 10^{-2}$:

$$U(\lambda) = \lambda \cdot \sqrt{\left(\frac{U(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{U(k)}{k}\right)^2} = 6,25 \times 10^{-7} \times \sqrt{(5,0 \times 10^{-4})^2 + (4,8 \times 10^{-2})^2} \approx 3,0 \times 10^{-8} \text{ m}$$

L'incertitude sur k est très largement prépondérante. La longueur d'onde s'écrit donc :

$$\lambda = (6,3 \pm 0,3) \times 10^{-7} \text{ m} \quad \text{soit} \quad 600 \text{ nm} \leq \lambda \leq 660 \text{ nm}$$

L'encadrement obtenu contient la valeur 635 nm annoncée par le fabricant, mais pas 830 nm. Pour comparer la mesure à ces valeurs de référence, on calcule le **z-score** (écart normalisé) $z = \frac{|\lambda_{\text{réf}} - \lambda_{\text{exp}}|}{U(\lambda)}$, avec $\lambda_{\text{exp}} = 6,25 \times 10^{-7} \text{ m} = 625 \text{ nm}$ et $U(\lambda) = 30 \text{ nm}$:

$$z_{635} = \frac{|635 - 625|}{30} \approx 0,33 < 2$$

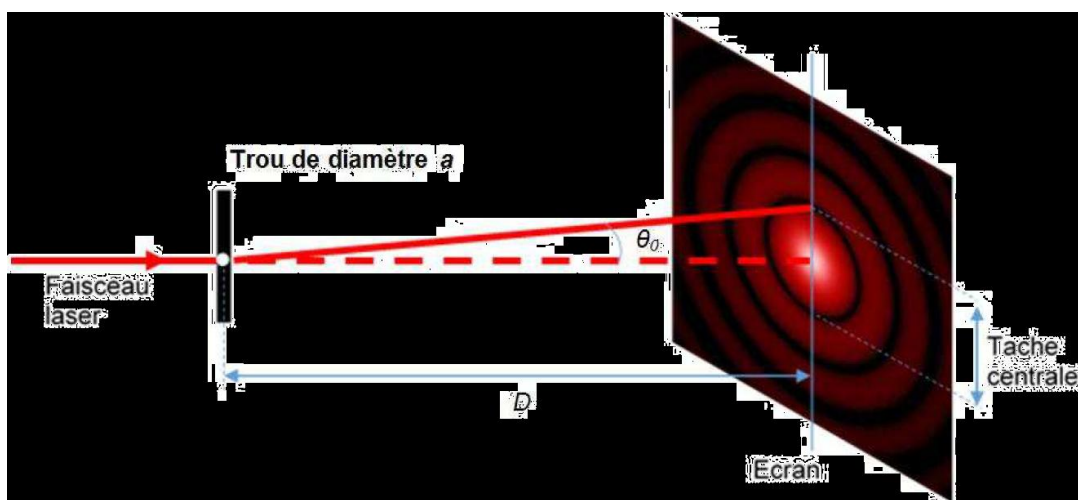
$$z_{830} = \frac{|830 - 625|}{30} \approx 6,8 > 2$$

Seule la diode à 635 nm est compatible avec la mesure ($z < 2$) : la longueur d'onde déterminée est validée, et c'est bien cette diode qui équipe l'appareil de granulométrie.

Partie 2 – Étude de la diffraction par la poudre de cacao

Dans cette partie, on considère que l'on peut déterminer le diamètre moyen des grains de cacao d'une poudre donnée en utilisant une figure de diffraction réalisée avec la diode laser de longueur d'onde $\lambda = 635 \text{ nm}$.

Donnée : Expérience de diffraction par un trou circulaire :



La figure de diffraction obtenue par un trou circulaire est constituée de cercles concentriques alternativement brillants et sombres avec :

$$\sin \theta_0 = \frac{1,22 \cdot \lambda}{a}$$

Exercice – Diffraction par une poudre de cacao

- λ : longueur d'onde du faisceau laser, exprimée en mètre ;
- a : diamètre du trou, exprimée en mètre ;
- θ_0 : demi-angle au sommet, exprimée en radian.

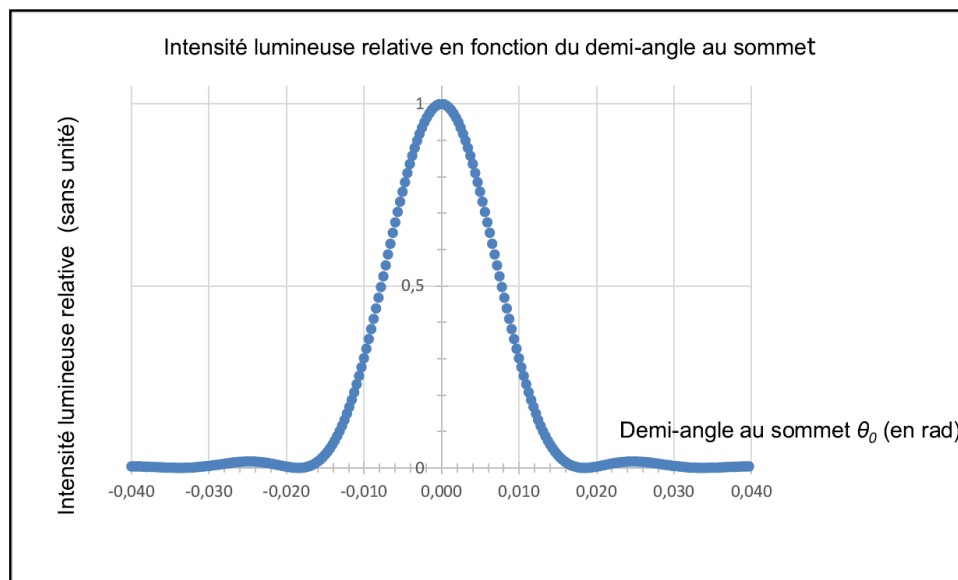
2.1. En utilisant un montage proche de celui donné ci-dessus, on réalise l'expérience sur un échantillon de poudre de cacao. Sachant que les grains de cacao sont assimilés à des sphères, justifier le fait qu'on observe une figure de diffraction identique à celle obtenue avec un trou circulaire.

✓ Correction

Question hors programme : le programme de Terminale spécialité limite l'étude quantitative de la diffraction à une fente rectangulaire ; le théorème de Babinet utilisé ci-dessous n'y figure pas.

Un grain de cacao assimilé à une sphère se comporte comme un obstacle circulaire de diamètre a . La figure de diffraction d'un obstacle circulaire de diamètre a est identique à celle d'un trou circulaire de même diamètre (théorème de Babinet) : la figure observée est donc la même que celle obtenue avec le trou circulaire.

2.2. Après traitement informatique des résultats expérimentaux lors du contrôle d'un échantillon de poudre de cacao, on obtient le graphe ci-dessous donnant l'intensité lumineuse relative sur l'écran en fonction du demi-angle θ_0 . Peut-on utiliser cet échantillon pour un chocolat de couverture ?



✓ Correction

Sur le graphe, l'intensité lumineuse s'annule pour $\theta_0 \approx 0,018 \text{ rad}$: c'est le demi-angle au sommet de la tache centrale (premier minimum d'intensité).

D'après la donnée $\sin \theta_0 = \frac{1,22 \lambda}{a}$:

$$a = \frac{1,22 \lambda}{\sin \theta_0} = \frac{1,22 \times 6,35 \times 10^{-7} \text{ m}}{\sin(0,018 \text{ rad})} = 4,3 \times 10^{-5} \text{ m} = 43 \mu\text{m}$$

Le document 2 donne $a = 10 \mu\text{m}$ pour un chocolat de couverture : avec des grains de $43 \mu\text{m}$, cet échantillon **ne peut pas** être utilisé pour un chocolat de couverture (les grains sont trop gros).