

Mouvement dans un champ de gravitation – Les lois de Kepler

Vidéo : [Accéder à la vidéo du cours](#)

Manuel : pages 264 à 266



Vidéo du cours

11.1 Un peu de vocabulaire

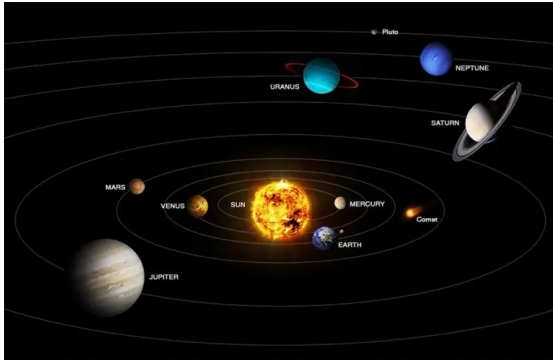


FIGURE 1 – Notre système solaire

À retenir

La trajectoire formée par une planète autour du Soleil s'appelle une **orbite**.

Les orbites forment des **ellipses**, qui en première approximation peuvent être considérées comme circulaires dans certains exercices.

La durée que met un astre à effectuer une **révolution**, c'est-à-dire à parcourir une fois son orbite, est appelée **période de révolution** et se note T .

11.2 Les lois de Kepler

11.2.1 Première loi de Kepler

À retenir

Première loi de Kepler : les planètes suivent une orbite elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse.

Il est possible de comparer une ellipse à un cercle « aplati ». Une ellipse possède deux foyers : plus ces foyers sont loin l'un de l'autre, plus l'ellipse est aplatie. On parle d'**excentricité de l'ellipse**.

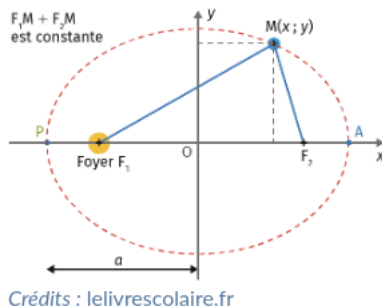


FIGURE 3 – Propriétés d'une ellipse

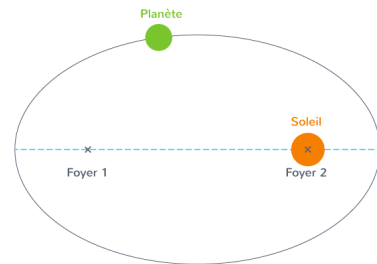


FIGURE 2 – Le Soleil occupe un des foyers de l'ellipse

Le point P le plus proche du Soleil se nomme le **périhélie**, le point A le plus éloigné du Soleil est l'**aphélie**.

La distance entre le centre de l'ellipse et le périhélie ou l'aphélie se note a et s'appelle le **demi-grand axe**.

Si les deux foyers sont confondus, l'ellipse devient un cercle et le demi-grand axe a correspond au rayon du cercle : $a = R$.

11.2.2 Deuxième loi de Kepler

À retenir

Deuxième loi de Kepler : le segment qui relie l'astre central à l'astre en rotation balaye des aires égales pendant des durées égales.

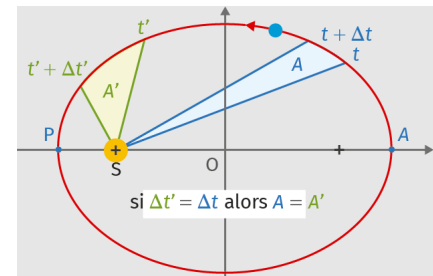


FIGURE 4 – Deuxième loi de Kepler

Cela implique que l'astre en rotation possède une vitesse maximale au niveau du périhélie et une vitesse minimale au niveau de l'aphélie. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, la deuxième loi de Kepler implique que la vitesse de l'astre en rotation est constante au cours du temps.

11.2.3 Troisième loi de Kepler

Démonstration dans le cas d'une trajectoire circulaire.

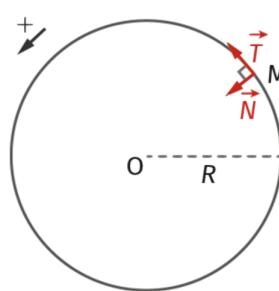


FIGURE 5 – Le repère de Frenet lors d'un mouvement circulaire

Soit une planète de masse M en rotation autour du Soleil.

La force d'interaction gravitationnelle qui s'exerce sur la planète par le Soleil s'exprime dans la base de Frenet par la relation :

$$\vec{F}_{S/P} = G \frac{M_S M}{R^2} \vec{N}$$

Avec R la distance Soleil / planète.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

Or l'accélération dans le repère de Frenet est :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Il vient que :

$$\begin{cases} 0 = M \frac{dv}{dt} \\ G \frac{M_S M}{R^2} = M \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

D'après la première équation, il vient que :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v = \text{constante}$$

♥ À retenir

Dans le cas d'un mouvement à force centrale pour une trajectoire circulaire, la vitesse de l'astre en rotation est une constante.

D'après la seconde équation, il vient que :

$$G \frac{M_S}{R} = v^2$$

Or la vitesse de l'astre en rotation s'exprime facilement par la relation :

$$v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du parcours}} = \frac{\text{périmètre de l'orbite}}{\text{période de révolution}} = \frac{2\pi R}{T}$$

Il vient que :

$$G \frac{M_S}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2$$

En réorganisant :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S}}$$

♥ À retenir

Troisième loi de Kepler : pour un astre en révolution autour d'un astre central donné, la période de révolution au carré est proportionnelle au rayon de l'orbite au cube :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = K}$$

avec K une constante pour un **astre central donné**. Cette constante K est donc la même pour toutes les planètes du système solaire puisque l'astre central est le Soleil. Si l'on travaille sur les lunes de Jupiter par exemple, cette constante K_{Jupiter} sera identique pour toutes les lunes de Jupiter mais ne sera pas la même que K_{Soleil} .

Dans le cas d'une trajectoire elliptique, la période de révolution est proportionnelle au demi-grand axe au cube :

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

📎 Remarque

La démonstration est à savoir refaire : elle est souvent plus ou moins guidée dans les sujets de baccalauréat.

11.3 Les satellites géostationnaires

♥ À retenir

Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui est fixe à la verticale d'un point de la surface terrestre. Les satellites géostationnaires sont contenus dans le plan équatorial de la Terre et leur période de révolution est égale à la durée que met la Terre à tourner sur elle-même, appelée **jour sidéral**.

Un jour sidéral vaut : $T = 23\text{h}56\text{min}4\text{s} = 86\,164\text{s}$

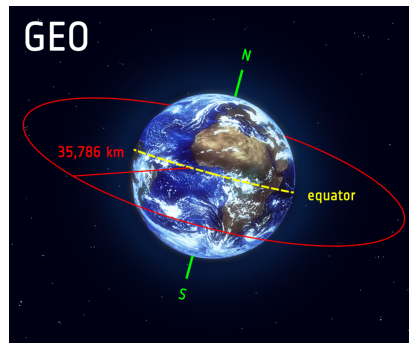


FIGURE 6 – Orbite d'un satellite géostationnaire

À quelle distance h de la surface de la Terre doit se situer le satellite dans le plan équatorial afin qu'il soit géostationnaire? Pour répondre à cette question, utilisons la troisième loi de Kepler. En supposant un mouvement circulaire uniforme du satellite autour de la Terre, il vient :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Avec M_T la masse de la Terre et $R = R_T + h$ avec R_T le rayon de la Terre, d'où

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{(R_T + h)^3} &= \frac{4\pi^2}{GM_T} \\ \Leftrightarrow (R_T + h)^3 &= \frac{T^2 GM_T}{4\pi^2} \\ \Leftrightarrow R_T + h &= \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} \\ \Leftrightarrow h &= \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} - R_T \end{aligned}$$

Application numérique :

Remarque

On choisit comme période de révolution du satellite celle de la rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique (jour sidéral), soit $T \approx 86\,164$ s (environ 23 h 56 min 4 s).

$$h = \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{4\pi^2}} - 6,4 \times 10^6 = 3,6 \times 10^7 \text{ m} = \boxed{3,6 \times 10^4 \text{ km}}$$

Un satellite géostationnaire doit donc se trouver à 36 000 km de la surface terrestre, dans le plan de l'équateur.

Maîtrise				
Compétence				
Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.				
Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.				
Satellite géostationnaire.				