Séquence 9 – Description d'un mouvement

Plan

I. Quelques Rappels

II. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

III. Le vecteur vitesse

IV. Le vecteur accélération

V. Le repère de Frenet

VI. Mouvements rectilignes

VII. Mouvement circulaire uniforme

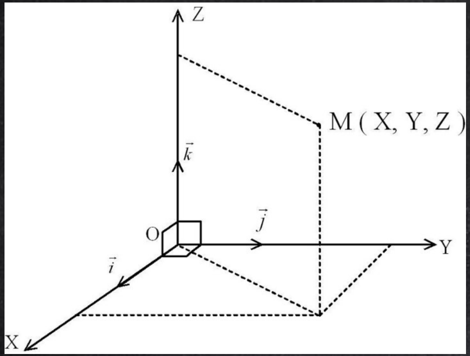
I. Quelques Rappels

La mécanique étudie le mouvement des objets dans l'espace et dans le temps.

L'objet dont on étudie le mouvement est appelé le « système ».

Les deux prochains chapitres sont ce qu'on appelle de la « mécanique du point » : L'étude d'un système qui est réduit à un point matériel correspondant à son centre de gravité.

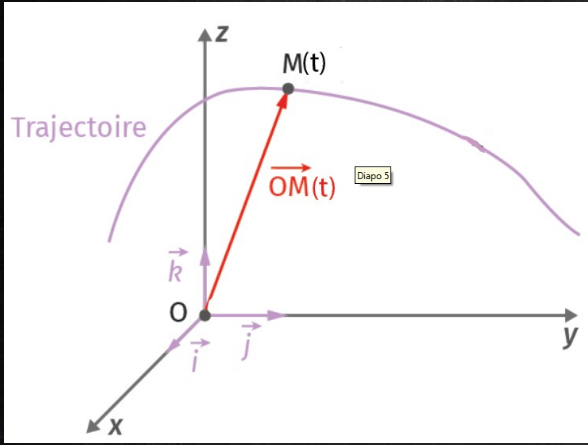
L'étude d'un mouvement se fait toujours dans un référentiel à préciser.
Dans le référentiel d'étude, on défini un repère orthonormé, par exemple un repère cartésien :



Un point matériel noté M est ici repéré par ses coordonnées x, y et z

II. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

On réalise l'étude du mouvement d'un système réduit en point que l'on note M et qui correspond au centre de gravité de l'objet. Le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen, un référentiel où le principe d'inertie est respecté.



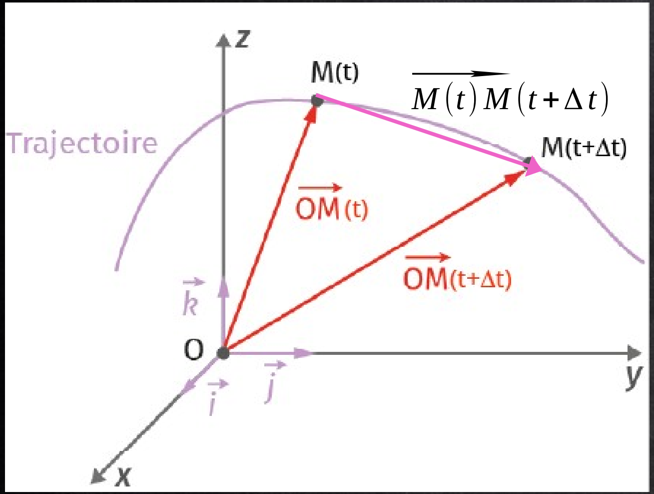
Le vecteur position se note :

$$\overrightarrow{OM}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$$

La norme du vecteur position correspond à la distance du point M par rapport à l'origine du repère

$$OM(t)=\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|=\sqrt{(x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2)}$$

III. Le vecteur vitesse



Vitesse instantanée vu en seconde :

$$\vec{v}_1(t)=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{v}_M(t)=\frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t}$$

Relation de Chasles

$$\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}=\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)$$

$$\vec{v}(t)=\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Pour avoir la vitesse en un point il faut faire tendre Δt vers 0, on a donc :

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

On reconnaît la formule de la dérivée d'une fonction en mathématiques

III. Le vecteur vitesse

Donc le vecteur vitesse s’obtient en dérivant le vecteur position par rapport au temps :

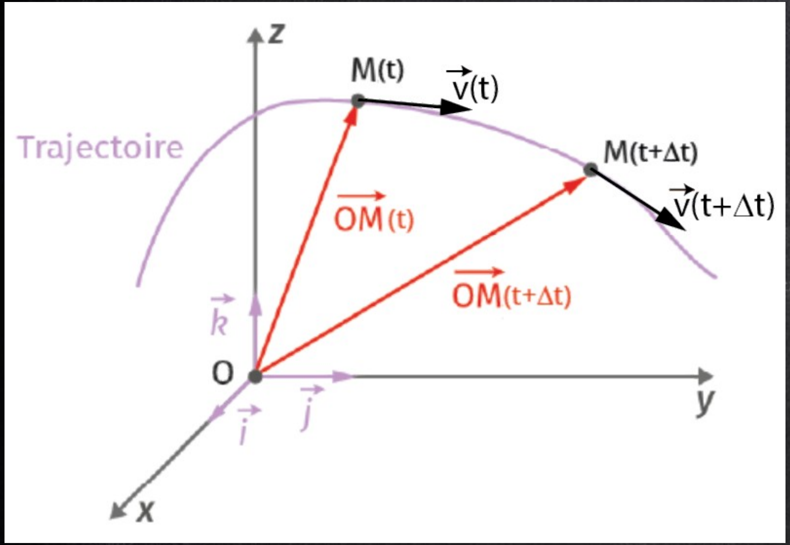
$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}}$$

Attention aux différentes notations entre la physique et les mathématiques :

La dérivée notée f’(t) sera notée $\frac{df(t)}{dt}$ où $\frac{d}{dt}$ représente l’opérateur dérivée

III. Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire



Il est bien sûr orienté dans le sens du mouvement, et sa longueur sur un schéma dépend de la norme du vecteur vitesse

Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Norme du vecteur vitesse :

$$v(t) = \left\|\vec{v}(t)\right\| = \sqrt{\left(v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2\right)}$$

III. Le vecteur vitesse

Exemple : Un système en mouvement dans un repère cartésien est repéré par un point matériel noté M. Les coordonnées du vecteur position sont :

$$\overrightarrow{OM}(t)=\begin{pmatrix} x(t)=24t^2+12t+3 \\ y(t)=3t+2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la norme des vecteurs vitesses à t=0 et t=3 secondes

Il faut commencer par calculer les composantes du vecteur vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$

$$\left.\begin{array}{l} v_x(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}(24t^2+12t+3)=48t+12 \\ \\ v_y(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}(3t+2)=3 \end{array}\right\} \quad \vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 48t+12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III. Le vecteur vitesse

A t=0 :

$$\vec{v}(0)=\begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A t=3:

$$\vec{v}(3)=\begin{pmatrix} v_x(3) \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 156 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A t=0 : $v(0)=\sqrt{(v_x(0)^2+v_y^2)}=\sqrt{(12^2+3^2)}=\sqrt{(153)}=12{,}4\,m.s^{-1}$

A t=3s: $v(3)=\sqrt{(v_x(3)^2+v_y^2)}=\sqrt{(156^2+3^2)}=156\,m.s^{-1}$

Ces valeurs correspondent à la valeur de la vitesse à deux dates différentes : 0 et 3 secondes

IV. Le vecteur accélération

En première, vous avez travaillé sur le vecteur variation de vitesse $\overrightarrow{\Delta v}$

Ce vecteur était défini par la différence entre les vecteurs vitesse associées à deux points successifs de la trajectoire :

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

Le vecteur accélération est défini par la variation du vecteur vitesse par intervalle de temps :

$$\vec{a}(t) = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Si l'intervalle de temps Δt tend vers 0, alors :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

IV. Le vecteur accélération

On définit donc le vecteur accélération par la dérivée du vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

La norme du vecteur accélération $\|\vec{a}(t)\|=a(t)$ s'exprime en m/s^2 (m.s^{-2})

Coordonnées du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{a}(t)=\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Dérivée seconde du vecteur position

IV. Le vecteur accélération

Exemple : Un système un mouvement dans un repère cartésien est repéré par un point matériel noté M. Les coordonnées du vecteur position sont :

$$\overrightarrow{OM}(t)=\begin{pmatrix} x(t)=24t^2+12t+3 \\ y(t)=3t+2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la norme des vecteurs accélération à t=0 et t=3 secondes

Il faut commencer par calculer les composantes du vecteur accélération $a_x(t)$ et $a_y(t)$

$$\left.\begin{array}{l} a_x(t)=\dfrac{dv_x(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}(48t+12)=48 \\[2ex] a_y(t)=\dfrac{dv_y(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}(3)=0 \end{array}\right\} \quad \vec{a}=\begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

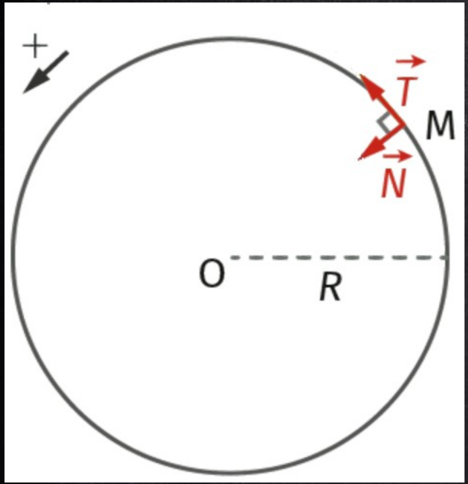
L'accélération dans cet exemple ne dépend pas du temps. Sa norme est :

$$a=\sqrt{(a_x^2)}=\sqrt{(48^2)}=48\,m.s^{-2}$$

La vitesse augmente de 48 m/s chaque seconde

V. Le repère de Frenet

Le repère de Frenet est un repère mobile très pratique pour étudier les mouvements circulaires.



Cette base est composée de deux vecteurs unitaires :

$\vec{N}$ pour la composante normale (perpendiculaire à la trajectoire)

$\vec{T}$ pour la composante tangentielle

Le vecteur vitesse étant toujours tangent à la trajectoire, son expression dans le repère de Frenet est :

$$\vec{v}(t)=v\,\vec{T}=\begin{pmatrix} v_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur accélération s'exprime par la relation :

$$\vec{a}(t)=\frac{dv}{dt}\vec{T}+\frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Avec R le rayon du cercle

VI. Mouvements rectilignes

Mouvement rectiligne : une seule composante du vecteur position dépend du temps. En choisissant un repère approprié on se ramène à un cas où :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x(t)\,\vec{i}$$

Si le vecteur vitesse, et donc, la dérivée du vecteur position est une constante, alors le mouvement est uniforme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k\,\vec{i} \quad \text{Implique que} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

Si la vitesse n’est pas constante, mais que le vecteur accélération est constant, alors le mouvement est uniformément accéléré

$$\vec{a} = k\,\vec{i}$$

VII. Mouvement circulaire uniforme

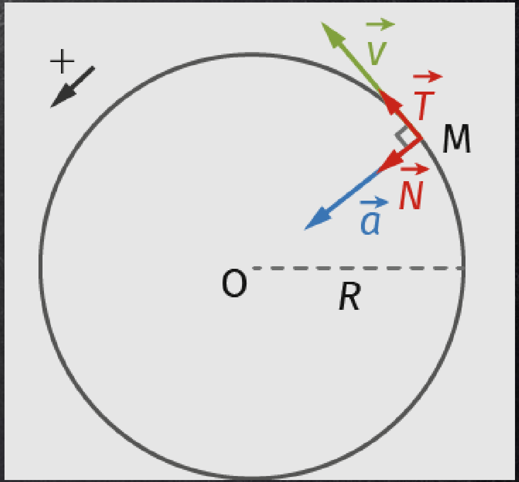
Lors d'un mouvement circulaire uniforme, la vitesse est constante. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, donc dans le repère de Frenet :

$$\vec{v} = v\vec{T} \qquad \text{Avec } v \text{ une constante}$$

L'accélération vaut quant à elle : $\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$

La vitesse étant constante, le terme $\frac{dv}{dt}$ vaut 0, on a donc :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$$



L'accélération est centripète (dirigée vers le centre du cercle) et de norme :

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Merci !

N’oubliez pas la fiche de cours à réaliser !